

## О МЕХАНИЗМЕ ЗАХВАТА ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРЕНИЕ В БЕТАТРОНЕ

I

Б. Н. РОДИМОВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

### Движение электронных пучков в магнитном поле бетатрона на первых оборотах

Существующие теории бетатрона [1, 2, 3, 4, 5, 6] являются, собственно, теориями одноэлектронными, они рассматривают движение одиночного электрона в магнитном поле бетатрона. Ясно, однако, что полной картины, необходимой для сознательного подхода к расчету бетатрона с большой интенсивностью излучения, такие теории дать не могут, ибо в реальном бетатроне всегда имеют дело не с одним электроном, а с пучком электронов.

В данной работе делается попытка подойти к проблеме захвата электронов в ускорение, рассматривая ее с самого начала как проблему многоэлектронную.

### Стационарный равновесный электронный пучок

Введем понятие стационарного равновесного электронного пучка, движущегося в аксиально симметричном магнитном поле бетатрона. Для электронов такого пучка дефокусирующие силы электрического отталкивания, уравновешиваются силами фокусирующими, создаваемыми специально подобранным магнитным полем. Для электрона такого пучка уравнения движения вдоль осей  $r$  и  $z$  имеют вид:

$$mr\dot{\theta}^2 - \frac{e}{c} r\dot{\theta} H_z - eE_r = 0, \quad (1)$$

$$\frac{e}{c} r\dot{\theta} H_r - eE_z = 0.$$

Под вектором  $\vec{E}$  будем понимать напряженность электрического поля, созданного электронами пучка

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{e\rho dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

$$E_z = \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{e\rho dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$
(2)

Здесь  $\rho$ —плотность пучка электронов, т. е. число электронов в  $1 \text{ см}^3$ ,  $e$ —абсолютная величина заряда электрона.

Как известно [3], для стационарного магнитного поля можно написать

$$mr\dot{\Theta}^2 - \frac{e}{c} r\dot{\Theta} H_z = -e \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e}{2mc^2} \left( \frac{r^2 \bar{H}_z}{2} + C \right)^2 \right] = -e \frac{\partial V_M}{\partial r},$$

$$\frac{e}{c} r\dot{\Theta} H_r = -e \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{e}{2mc^2} \left( \frac{r^2 \bar{H}_z}{2} + C \right)^2 \right] = -e \frac{\partial V_M}{\partial z}.$$
(3)

Таким образом, вместо уравнений [1] имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \int \frac{e\rho_{pas} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{e}{2mc^2} \left( \frac{r^2 \bar{H}_z}{2} + C \right)^2 \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \int \frac{e\rho_{pas} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{e}{2mc^2} \left( \frac{r^2 \bar{H}_z}{2} + C \right)^2 \right] = 0$$
(4)

или

$$\frac{\partial}{\partial r} [\varphi_{pas} - V_M] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [\varphi_{pas} - V_M] = 0.$$
(5)

Здесь  $\varphi_{pas}$  и  $\rho_{pas}$  означают потенциал и плотность равновесного пучка. Выражения в квадратных скобках могут быть приравнены постоянной или нулю. Постоянная  $C$  имеет одно значение для всех электронов данного равновесного пучка. Уравновешивание сил магнитного поля и сил электрических возможно только при вполне определенном пространственном распределении плотности электронов  $\rho_{pas}$ .

Можно положить

$$V_M = - \int \frac{e\rho_{pas} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\varphi_{экв}.$$
(6)

Тогда уравнения движения запишутся

$$\frac{\partial}{\partial r} [\varphi_{экв} + \varphi_{pas}] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} [\varphi_{экв} + \varphi_{pas}] = 0$$
(7)

или

$$\frac{\partial \varphi_{\text{экр}}}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi_{\text{рав}}}{\partial r}; \quad \frac{\partial \varphi_{\text{экр}}}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_{\text{рав}}}{\partial z}. \quad (8)$$

Отсюда

$$\varphi_{\text{экр}} = -\varphi_{\text{рав}} + K, \quad (9)$$

где  $K$ —некоторая постоянная.

Таким образом, магнитное поле, обладающее фокусирующими свойствами, эквивалентно по своим действиям на электронный пучок некоторому пучку фиктивных положительных зарядов, расположенных в пространстве с той же плотностью и в тех же местах, что и электроны. Для таких зарядов

$$\text{div } \vec{E}_{\text{экр}} = 4\pi e \rho_{\text{рав}},$$

$$\vec{E}_{\text{экр}} = -\text{grad} \varphi_{\text{экр}}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\text{экр}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_{\text{экр}}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_{\text{экр}}}{\partial z^2} = -4\pi e \rho_{\text{рав}}.$$

Пользуясь соотношением (6), можно написать:

$$4\pi e \rho_{\text{рав}} = -\frac{\partial^2 V_{\text{м}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_{\text{м}}}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_{\text{м}}}{\partial z^2}. \quad (11)$$

Зная, таким образом, потенциальную функцию магнитного поля, мы можем вычислить и распределение равновесного заряда  $\rho_{\text{рав}}$ .

Когда  $\rho_{\text{рав}}$  получается равным нулю,  $V_{\text{м}}$  удовлетворяет уравнению Лапласа и фокусирующее поле не будет (фокусировка получается в одном направлении, в другом направлении поле будет дефокусирующим). Также поле не будет фокусирующим при  $\rho_{\text{рав}} < 0$  (в этом случае поле будет дефокусирующим в обоих направлениях). И только при  $\rho_{\text{рав}} > 0$  имеем в той области, где это неравенство справедливо, фокусирующие силы.

Интересно отметить, что хотя функция  $V_{\text{м}}$  удовлетворяет уравнению Пуассона, обычный скалярный потенциал магнитного поля  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Подставляя в уравнение Лапласа для скалярного потенциала выражение его через потенциальную функцию  $V_{\text{м}}$ , получим тождественный нуль [8].

Для электростатического поля таких двух форм потенциальной функции написать нельзя, поэтому с электростатическим полем нельзя получить фокусирующее поле бетатронного типа.

### Уравнения движения электрона, принадлежащего неравновесному пучку электронов

Для произвольного электрона уравнения движения будут иметь вид:

$$mr\dot{\theta}^2 - \frac{e}{c} r\dot{\theta}H_z - eE_r = m\ddot{r},$$

$$\frac{e}{c} r\dot{\theta}H_r - eE_z = m\ddot{z}. \quad (12)$$



Будем считать, что электрон принадлежит пучку с некоторой плотностью  $\rho$  и движется вместе с ним в магнитном поле бетатрона. Как и раньше, компоненты электрического поля пучка электронов можно выразить через плотность  $\rho$  ( $\rho$  вообще не равно  $\rho_{pav}$ ):

$$E_r = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{e \rho dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{e \rho dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$
(13)

Действием силы  $E_\theta$  пренебрегаем. Действие реального магнитного поля заменяем эквивалентным действием электрического поля фиктивного пучка положительных зарядов, распределенных в пространстве с плотностью  $\rho_{pav}$

$$E_{r\text{экс}} = \frac{\partial \varphi_{pav}}{\partial r} = \frac{\partial V_m}{\partial r}, \quad E_{z\text{экс}} = \frac{\partial \varphi_{pav}}{\partial z} = \frac{\partial V_m}{\partial z}.$$
(14)

Подставляя вместо компонент поля их выражения через  $\rho$  и  $\rho_{pav}$ , получим

$$e \frac{d}{dr} \int \frac{e[\rho_{pav} - \rho] dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = m \ddot{r}, \quad e \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{e[\rho_{pav} - \rho] dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = m \ddot{z}.$$
(15)

Можно ввести понятие об эффективном электрическом поле, в котором движется электрон

$$m \ddot{r} = -e E_{r\text{эфф}},$$
(16)

$$m \ddot{z} = -e E_{z\text{эфф}},$$

где, очевидно,

$$E_{r\text{эфф}} = E_r + E_{r\text{экс}},$$
(17)

$$E_{z\text{эфф}} = E_z + E_{z\text{экс}}$$

и

$$\varphi_{\text{эфф}} = \varphi_{\text{экс}} + \varphi,$$
(18)

$$\rho_{\text{эфф}} = \rho_{pav} - \rho.$$

В векторной форме уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{e}{m} \vec{E}_{\text{эфф}},$$
(19)

где

$$\vec{E}_{\text{эфф}} = -\text{grad } \varphi_{\text{эфф}},$$
(20)

$$\text{div } \vec{E}_{\text{эфф}} = 4 \pi e (\rho_{pav} - \rho).$$



Будем пользоваться методом прослеживания, т. е. будем рассматривать изменения величин, характеризующих пучок, вдоль траекторий, по которым движутся электроны. Для наблюдателя, движущегося вместе с электроном, можно написать

$$\frac{d\vec{E}_{эфф}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}_{эфф}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{E}_{эфф}.$$

Пучок электронов рассматриваем как гидродинамическую струю, для которой имеет место уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \rho + \rho \text{div } \vec{v} = 0$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \cdot \text{div } \vec{v}. \quad (21)$$

Решая систему уравнений (19), (20), (21), мы должны были бы получить полностью движение пучка электронов в магнитном поле при учете взаимодействия электронов друг с другом. Однако решить ее без упрощающих предположений невозможно. Условимся, прежде всего, что мы будем рассматривать стационарные движения, т. е. будем всегда считать, что

$$\frac{\partial E_{эфф}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ и т. д.}$$

### Пучок взаимодействующих между собой электронов в магнитном поле бетатрона

Вводим следующие упрощающие предположения:

1. Потенциальная яма магнитного поля является параболической.
2. Радиус тороида камеры много больше размеров поперечного сечения камеры, следовательно, и размеров действующей ямы.
3. Пучок электронов считаем имеющим вид ленты, бесконечной в направлении  $z$ . Конечным является только размер в направлении  $r$  (или  $x$ ), причем изменение ширины пучка в этом направлении или его сдвиг в направлении оси  $r$  существенно не изменяет его характера как плоского пучка.

4. Плотность пучка электронов является функцией только азимутальной координаты  $y$  ( $y = r\theta$ ), так что  $\rho(x_2 - x_1) = \rho_0(x_{20} - x_{10})$ , где значки „0“ означают начальные значения в момент вылета из пушки.

При этих предположениях можно просто выразить силы, действующие на каждый электрон пучка. Силы, действующие со стороны магнитного поля бетатрона, будут определяться величиной эквивалентной напряженности магнитного поля

$$E_M = 4 \pi e \rho_{рав} \cdot x, \quad (22)$$

где  $x = r - R$  ( $R$  — равновесный радиус).

Это будет фокусирующая сила. Дефокусирующей силой будет сила, действующая на данный электрон со стороны других электронов пучка. Эта сила определяется напряженностью

$$E_E = -2\pi e \rho [2x - (x_1 + x_2)], \quad (23)$$

$x_1$  и  $x_2$  — границы пучка в направлении  $x$ .

На этом основании можно сразу написать выражение для траектории электрона пучка

$$x = -\frac{e}{2m} \int_0^t (t-\xi)^2 \frac{dE_{эфф}}{d\xi} d\xi - \frac{e}{2m} E_{эфф} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (24)$$

В нашем случае

$$\frac{dE_{эфф}}{dt} = 4\pi e \rho_{pas} v - 2\pi e \rho [2v - (v_1 + v_2)] - 2\pi e \frac{d\rho}{dt} \cdot [2x - (x_1 + x_2)]. \quad (25)$$

Если подставить это выражение в (24), получим довольно сложное интегро-дифференциальное уравнение. Можно, однако, превратить его в дифференциальное уравнение, если продифференцировать его по  $t$  три раза и сделать некоторые упрощающие предположения.

Получаем

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{4\pi e^2}{m} v(\rho_{pas} - \rho) - \frac{2\pi e^2}{m} \rho(v_1 + v_2) + \frac{2\pi e^2}{m} \cdot \frac{d\rho}{dt} [2x - (x_1 + x_2)] \quad (26)$$

Если взять электрон, для которого  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , то для него это уравнение сведется к уравнению движения одиночного электрона в магнитном поле бетатрона, т. е.

$$\frac{d^2v'}{dt^2} = -\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pas} \cdot v'. \quad (27)$$

Пусть теперь

$$v = v' + v''.$$

Тогда для  $v''$ , если пренебречь членом с  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ , получим

$$\frac{d^2v''}{dt^2} = -\frac{4\pi e^2}{m} v''(\rho_{pas} - \rho). \quad (28)$$

С другой стороны, если положить  $v_1 = -v_2$ , то из уравнения (26) при том же пренебрежении получим это же уравнение.

Таким образом, уравнение (28) определяет приближенно скорость электронов пучка, впущенного непосредственно вдоль равновесной орбиты, под влиянием сил отталкивания зарядов между собой и сил фокусирующих магнитного поля.

Если пучок выпущен не на равновесную орбиту, то это движение будет накладываться на колебательное движение всего пучка около равновесной орбиты.

При наших предположениях, указанных в начале настоящего параграфа, мы можем найти функцию  $\rho(t)$ , а также  $v''$  и  $x''$ , вызываемые действием электрического поля пучка и магнитным полем бетатрона.

Действительно, для пучка электронов, вылетающих непосредственно на равновесную орбиту, мы можем написать

$$\begin{aligned} v_y = v_\theta = \text{const}, \\ \frac{\partial v''_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v''_r}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$



Уравнение неразрывности дает

$$\frac{d\rho}{dt} = v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (30)$$

и

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v''_r}{\partial r} \quad (31)$$

Используя равенство  $\frac{dv''_r}{dt} = v''_r \cdot \frac{\partial v''_r}{\partial r} = -\frac{e}{m} E_{rэфф}$  и комбинируя его с (31), получим

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{v''_r} \cdot \frac{dv''_r}{dt} \quad (32)$$

Дифференцируя последнее выражение еще раз и выражая  $\frac{d^2 v''_r}{dt^2}$  через плотности  $\rho$  и  $\rho_{рав}$ , получим для плотности пучка уравнение

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \rho(\rho - \rho_{рав}) = 0. \quad (33)$$

Если  $\rho_{рав} = \text{const}$ , а при наших предположениях это принять можно, уравнение (33) может быть решено, и мы найдем  $\rho$  как функцию  $t$ .

Решение имеет вид

$$\rho = \frac{\rho_{рав}}{1 - \sqrt{1 + C_1 \frac{m}{4\pi e^2} \rho_{рав} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{рав} \cdot t} + C_2\right)}} \quad (34)$$

Если  $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{t=0} = 0$ , т. е. пучок вылетает из пушки в виде параллельного пучка

$$C_1 = -\frac{8\pi e^2}{m} \cdot \frac{1}{\rho_0} + \frac{4\pi e^2}{m} \cdot \frac{\rho_{рав}}{\rho_0^2}, \quad (35)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность пучка. Выражение под корнем при этом также упростится

$$1 + C_1 \cdot \frac{m}{4\pi e^2} \rho_{рав} = \left(1 - \frac{\rho_{рав}}{\rho_0}\right)^2 = D^2. \quad (36)$$

Так как при  $t = 0$   $\rho$  должно равняться  $\rho_0$ , то  $C_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Окончательно имеем

$$\rho = \frac{\rho_{рав}}{1 - D \cos \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{рав} \cdot t}} \quad (37)$$

Таким образом, характер изменения  $\rho$  будет определять величина  $D$ . В области  $1 > D > 0$  электронный пучок после инъекции сначала расходится, потом сходится. Плотность всегда остается  $\leq \rho_0$ . В области  $-1 < D < 0$  пучок сначала сходится, потом расходится, причем  $\rho \geq \rho_0$ .

В области  $D < -1$  пучок теряет гидродинамический характер, поэтому эту область мы не рассматриваем.

Зная изменение  $\rho$  со временем, мы, в силу наших предположений, можем определить изменение ширины пучка в направлении  $r$ . Так как

$$l_t \rho_t = l_0 \rho_0, \quad (38)$$





где  $l_t = (x_2 - x_1)_t$  и  $l_o = (x_2 - x_1)_o = 2\Delta l_o$ , то

$$l_t = \frac{\rho_o l_o}{\rho_{pav}} \left[ 1 - D \cos \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} \cdot t} \right]. \quad (39)$$

Скорость края пучка будет

$$v''_r = \frac{\rho_o}{\rho_{pav}} \Delta l_o \left( 1 - \frac{\rho_{pav}}{\rho_o} \right) \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav}} \sin \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} \cdot t}. \quad (40)$$

Если пучок движется как целое, то скорость электрона

$$v_r = v'_r + v''_r = - \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav}} \left[ x_o - \Delta l_o \left( \frac{\rho_o}{\rho_{pav}} - 1 \right) \right] \sin \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} \cdot t}. \quad (41)$$

Отсюда получаются траектории крайних электронов пучка

$$\begin{aligned} x_2 &= \left[ x_o - \Delta l_o \left( \frac{\rho_o}{\rho_{pav}} - 1 \right) \right] \left[ \cos \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} \cdot t} - 1 \right] + x_o + \Delta l_o, \\ x_1 &= \left[ x_o + \Delta l_o \left( \frac{\rho_o}{\rho_{pav}} - 1 \right) \right] \left[ \cos \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} \cdot t} - 1 \right] + x_o - \Delta l_o. \end{aligned} \quad (42)$$

По мере возрастания плотности пучка может наступить момент, когда пучок при своем движении в направлении  $r$  будет задевать стенку камеры и электроны будут уходить в землю через проводящий слой.

Процент потерь электронов определится отношением

$$\eta = \left| \frac{X_{лев} - x_o - \Delta l_o \left( 2 \frac{\rho_o}{\rho_{pav}} - 1 \right)}{2\Delta l_o \left( 2 \frac{\rho_o}{\rho_{pav}} - 1 \right)} \right| \quad (43)$$

$X_{лев}$  — координата левой внутренней стенки камеры.

Из приведенных формул видно, что электроны, которые без учета взаимодействия должны были удариться о стенку камеры, благодаря взаимодействию до стенки на первом обороте не доходят.

Можно вычислять траектории электронов и более точным способом, так как

$$x = - \frac{e}{2m} \int_0^t (t - \xi)^2 \frac{dE_x}{d\xi} d\xi - \frac{e}{2m} E_{x0} \cdot t^2 + v_{x0} \cdot t + x_o,$$

то, если бы была известна зависимость  $\frac{dE_x}{dt}$ , вычисление не представляло бы труда. Однако,  $\frac{dE_x}{dt}$  найти довольно сложно. Имеем

$$v_x = - \frac{e}{m} \int_0^t (t - \xi) \frac{dE_x}{d\xi} d\xi - \frac{e}{m} E_{x0} \cdot t + v_{x0},$$

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{e}{m} \int_0^t \frac{dE_x}{d\xi} d\xi - \frac{e}{m} E_{x0}, \\ \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= -\frac{e}{m} \frac{dE_x}{dt} = -\frac{e}{m} v_x \frac{\partial E_x}{\partial x}, \\ \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= \frac{4\pi e^2}{m} (\rho - \rho_{pav}) v_x.\end{aligned}$$

Найдя из последнего уравнения  $v_x$  [ $(\rho - \rho_{pav})$  предполагается известным], находим  $\frac{dE}{dt}$  и затем  $x$ . Однако практически этот способ оказывается очень громоздким.

### Движение одиночного электрона в магнитном поле бетатрона в присутствии пучка электронов

Решение данной задачи явится основой для решения задачи о взаимодействии электронных пучков.

Силы, действующие на электрон со стороны пучка электронов ширины  $x_2 - x_1$ , определяются напряженностью поля, создаваемого пучком:

$$E_E = 2\pi e\rho(x_2 - x_1) = 2\pi e\rho_0(x_2 - x_1)_0 = \text{const} \quad (44)$$

(пучок по-прежнему считаем плоским).

Силы, действующие со стороны магнитного поля на электрон, определяются эквивалентной напряженностью  $E_M$

$$E_M = 4\pi e\rho_{pav} \cdot x \quad (45)$$

( $x$  — расстояние от равновесной орбиты).

Очевидно:

$$\frac{dE_{эфф}}{dt} = \frac{dE_E}{dt} + \frac{dE_M}{dt} = 4\pi e\rho_{pav} \cdot v_r.$$

Скорость электрона в направлении  $r$  будет

$$v_r = -\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} \int_0^t (t - \xi) v_r d\xi - \left[ \frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} x_0 - \frac{2\pi e^2}{m} \rho_0 (x_2 - x_1) \right] t + v_{r0}.$$

Дифференцируя два раза по  $t$ , получим прежнее уравнение для движения одиночного электрона в магнитном поле

$$\frac{d^2 v_r}{dt^2} = -\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{pav} v_r.$$

Однако присутствие пучка электронов, создающего поле постоянной напряженности, вызывает сдвиг минимума потенциальной ямы магнитного поля. Вместо ямы вида  $V_M = ax^2$ , получаем  $V_M = ax^2 + bx + c$ . Минимум будет не при  $x=0$ , а при  $x = -\frac{b}{2a}$ . В нашем случае

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{V_{mc}}{R} (1 - n_R) = -2\pi e \rho_{рав}, \\
b &= -2\pi e \rho_0 (x_2 - x_1)_0, \\
x_{min} &= -\frac{\rho_0}{\rho_{рав}} \cdot \Delta I_0.
\end{aligned}
\tag{46}$$

Движение пучка электронов пойдет по линии

$$x_2 = x_0 \cos \sqrt{\lambda} \cdot t = x_0 \sin \left( \sqrt{\lambda} \cdot t + \frac{\pi}{2} \right), \tag{47}$$

$$\lambda = \frac{4\pi e^2}{m} \rho_{рав}$$

(по этой линии движется фактически средний электрон пучка).

Траектория одиночного электрона до места пересечения ее с пучком электронов (точнее, с траекторией среднего электрона пучка) будет определяться сдвинутым влево минимумом  $A$  (рис. 1)

$$x_1 = a_1 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot t + \alpha_1) - d. \tag{48}$$

Величина амплитуды  $a_1$  и фазы  $\alpha_1$  определится из граничных условий при  $t=0$ . Движение электрона после пересечения определяется уравнениями

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot t + \alpha_2) + d, \\
v_1 &= a_2 \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot t + \alpha_2),
\end{aligned}
\tag{49}$$

$\alpha_2$  и  $\alpha_2$  находятся из начальных условий для  $x_1$  и  $v_1$  в точке пересечения. Для пучка уравнение остается прежним.

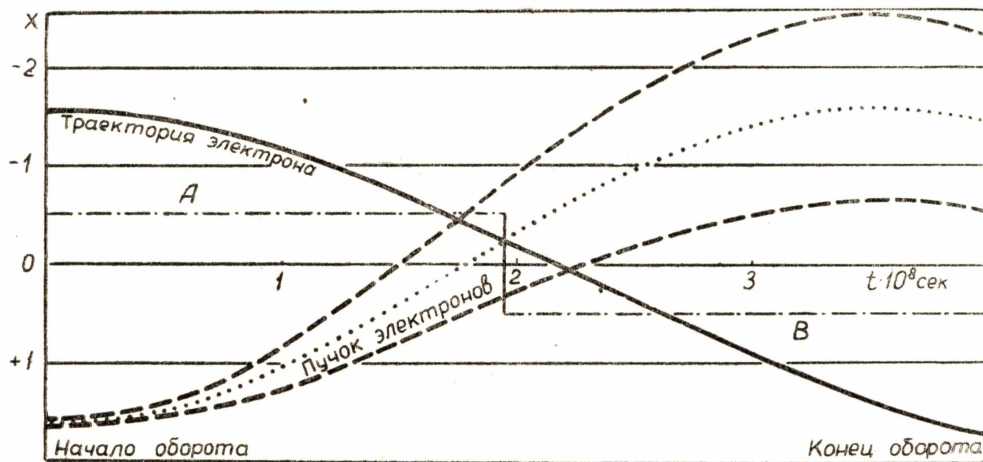


Рис. 1

Результаты вычисления для электрона с фазой  $\alpha_1 = \frac{3}{2} \pi$  и  $x_{10} = x_0$  представлены на рис. 1. Из рисунка хорошо видно влияние на движение электрона присутствия пучка электронов.



## Движение двух пучков одной скорости на втором обороте

Сделаем пояснение методов нашего дальнейшего исследования. Действительную картину непрерывного ввода электронов и непрерывной перестройки траекторий пучков мы будем заменять „ступенчатой“ картиной стационарных пучков, рассматривая ситуацию, фактически получающуюся лишь к концу периодов обращения, которые отсчитываются по первым электронам первого пучка. Другими словами, рассматриваем положение пучков в моменты, когда новый пучок, начавший свое существование в момент завершения оборота предыдущим пучком, заканчивает оборот в свою очередь. Пучок, начавший свое существование в момент завершения первым пучком первого оборота, будет называться вторым пучком и т. д. Можно ввести общие обозначения:

- $t$  — время от начала данного оборота;
- $\tau$  — время от момента пересечения одного пучка другим;
- $x_0$  — координата средней точки выброса электронов из пушки;
- ${}^k_n A_m$  — амплитуда  $n$ -го пучка на  $m$ -ом обороте на  $k$ -ом участке;
- ${}^k_n \beta_m$  — соответствующая фаза;
- ${}^k_n x_m$  — соответствующее отклонение;
- ${}^k_n x_{m0}$  — начальное отклонение  $n$ -го пучка на  $m$ -ом обороте на  $k$ -ом участке.

Будем рассматривать движение двух пучков электронов одинаковой начальной ширины и плотности. В каждом пучке будем рассматривать движение центрального электрона как движение одиночного электрона в магнитном поле бетатрона плюс электрическое поле другого пучка электронов. Если бы пучки не взаимодействовали друг с другом, то траектории этих электронов представляли бы в нашем изображении синусоиды с общей осью, представляющей собою положение точек дна потенциальной ямы, созданной магнитным полем. Поскольку взаимодействие имеет место, то это взаимодействие приводит к смещению дна потенциальной ямы для

электронов первого пучка на расстояние  $d = \frac{\rho_0}{\rho_{рав}} \Delta l_0$  до положения  $A$

(рис. 2). Для второго электронного пучка минимум сдвигается на такое же расстояние до положения  $B$ . После пересечения пучков соответственно меняются местами и положения новых осей колебания пучков.

Уравнения траекторий и скоростей пучка 1 (т. е. фактически траекторий тех электронов пучка, которые не чувствуют присутствия электронов своего пучка и движутся как одиночный электрон в магнитном поле и электрическом поле другого пучка) будут:

$$\begin{aligned} {}^1_1 x_2 &= {}^1_1 A_2 \sin(\sqrt{\lambda} t + {}^1_1 \beta_2) - d, \\ {}^1_2 x_2 &= {}^1_2 A_2 \sin(\sqrt{\lambda} t + {}^1_2 \beta_2) + d, \\ {}^1_2 v_2 &= {}^1_2 A_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} t + {}^1_1 \beta_2), \\ {}^1_2 v_2 &= {}^1_2 A_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} t + {}^1_2 \beta_2). \end{aligned} \tag{50}$$

Величины амплитуд и фаз определяются из граничных условий на „входе“ на второй оборот, т. е. при  $t=0$ .

На втором участке второго оборота будем иметь уравнения:

$$\begin{aligned}
{}^2_1x_2 &= {}^2_1A_2 \sin(\sqrt{\lambda} \tau_1 + {}^2_1\beta_2) + d, \\
{}^2_2x_2 &= {}^2_2A_2 \sin(\sqrt{\lambda} \tau_1 + {}^2_2\beta_2) - d, \\
{}^2_1v_2 &= {}^2_1A_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \tau_1 + {}^2_1\beta_2), \\
{}^2_2v_2 &= {}^2_2A_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \tau_1 + {}^2_2\beta_2).
\end{aligned}
\tag{51}$$

Амплитуды и фазы определяются из условий в точке пересечения, т. е. при  $\tau_1 = 0$  [ $\tau_1 = t - t_{\text{пересеч}}$ ].

Результаты вычислений для  $n = 0,7; 0,75; 0,8$  и  $d = 0; 0,2; 0,5$  представлены на рис. 2.

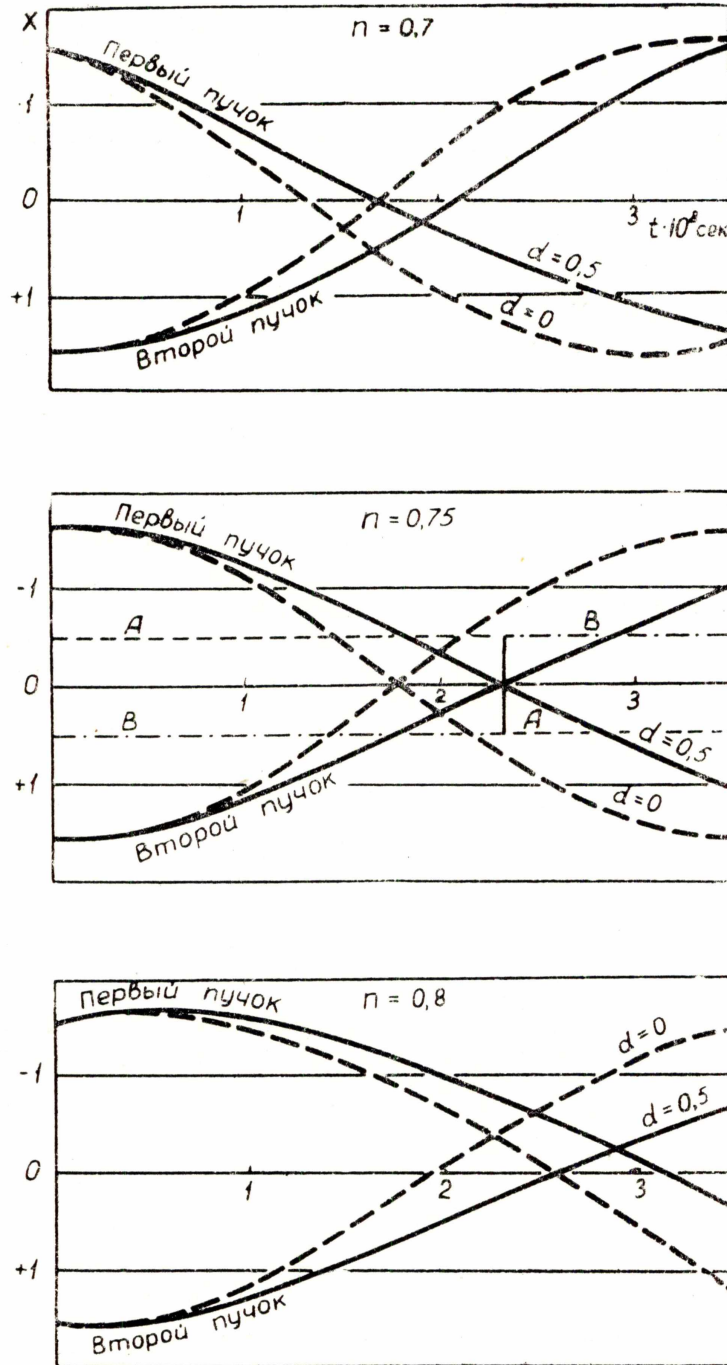


Рис. 2

При  $n = 0,75$  амплитуда колебаний пучков не меняется, однако происходит возрастание эффективного периода колебаний. Это увеличение тем больше, чем больше  $d$  (т. е. плотность пучков, так как  $d = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{рав}}} \Delta l_0$ ). Для



$n > 0,75$  на втором обороте максимальное отклонение первого пучка на первом участке возрастает с увеличением  $d$ . Для  $n < 0,75$  этого увеличения не будет. На втором участке (после пересечения пучков) происходит тем большее сближение пучков, чем больше величина  $d$ .

На приведенных рисунках величины  $d$  возрастают только до 0,5. Большие величины  $d$  ведут к большому увеличению размаха колебаний и большим потерям электронов на стенках камеры (нужно помнить еще, что большая плотность пучка ведет также к большому расширению самого пучка).

### Движение пучков на третьем и следующих оборотах

Для третьего оборота уравнения траекторий будут строиться совершенно аналогично случаю второго оборота. Нужно только принимать во внимание взаимное расположение пучков для определения „оси“ колебания пучка. Например, для первого участка третьего оборота получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} {}^1_1x_3 &= {}^1_1A_3 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}t + {}^1_1\beta_3), \\ {}^1_2x_3 &= {}^1_2A_3 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}t + {}^1_2\beta_3) - 2d, \\ {}^1_3x_3 &= {}^1_3A_3 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}t + {}^1_3\beta_3) + 2d, \\ {}^1_1v_3 &= {}^1_1A_3 \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}t + {}^1_1\beta_3), \\ {}^1_2v_3 &= {}^1_2A_3 \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}t + {}^1_2\beta_3), \\ {}^1_3v_3 &= {}^1_3A_3 \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}t + {}^1_3\beta_3). \end{aligned} \tag{52}$$

Для второго участка получаются аналогичные уравнения. Результаты вычисления для значений  $n = 0,7; 0,75; 0,8$  и плотностей  $d = 0; 0,5$  представлены на рис. 3.

На третьем обороте симметричности расположения пучков не получается даже для  $n = 0,75$ . Поэтому на третьем обороте эффект взаимодействия пучков получается более разительным. Для случая  $n = 0,75$  пучок 2 весьма значительно отклоняется от траектории этого же пучка в случае отсутствия взаимодействия. Размах колебания пучка увеличен. Для первого пучка получается интересная особенность: пучок не имеет тенденции пересечь ось  $x = 0$ . Происходит сдвиг вперед и у траектории третьего пучка.

Для  $n = 0,7$  при больших плотностях второй пучок значительно отходит от траектории невзаимодействующего пучка. Происходит увеличение размаха колебания как для пучка 2, так и для пучка 1, хотя сам первый пучок меняет свою траекторию мало. Третий пучок также не пересекает ось  $x = 0$  и совершает колебание с небольшой амплитудой около оси, параллельно оси  $x = 0$ .

Для  $n = 0,8$  также получает большое отклонение второй пучок, большое отклонение получает и третий пучок. Первый пучок значительно сдвигается вперед с тенденцией к уменьшению размаха колебаний.

Рассмотрение графиков траекторий пучков на первых трех оборотах позволяет сделать определенный вывод о характере движения пучков на четвертом и следующих оборотах.

При больших значениях  $d$ , как видно из рис. 2 и 3, вероятность сброса пучков на стенку камеры оказывается большой уже на втором и третьем оборотах. В сбросе пучков на стенки камеры играет большую роль взаимное расположение пучков на данном или предыдущих оборотах. Наиболь-



шие шансы погибнуть на данном обороте имеют те пучки, которые, идя по направлению к стенке камеры слишком круто, оказываются в течение большого времени по одну сторону от остальных пучков и испытывают, следовательно, наибольшие отталкивательные силы. Чем меньше величина  $d$  (т. е.  $\rho_0$ ), тем меньше вероятность сброса на стенки и больше вероятность столкновения с пушкой. Оптимальные значения  $d$  или  $\rho_0$  лежат около  $\rho_{рав}$  в довольно узких пределах. При этих значениях  $\rho_0$  последовательные

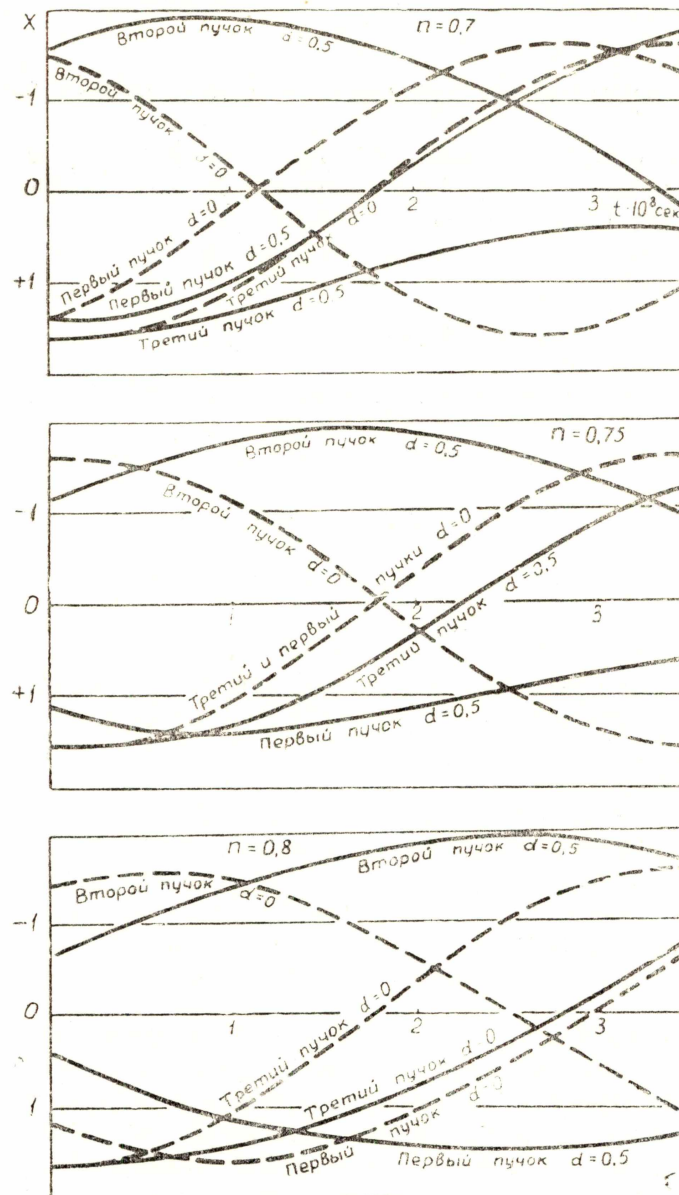


Рис. 3

пучки хорошо „укладываются“. Эффективный период колебаний постоянно увеличивается, колебания пучков будут идти около постоянно меняющихся от оборота к обороту осей, пока электроны не станут двигаться по окружностям, концентрическим с равновесной орбитой бетатрона.

Действительно, после достаточно большого числа оборотов вся камера окажется заполненной перекрещивающимися пучками электронов, создающими некоторую среднюю плотность  $\rho$ . Очередной входящий в камеру пучок оказывается, таким образом, в поле сил магнитного поля плюс элек-

трическое поле предыдущих пучков. Наличие этого суммарного пучка электронов плотности  $\bar{\rho}$  создает для нового пучка потенциальную яму меньшей глубины:

$$\lambda' = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} (\rho_{рав} - \bar{\rho})}.$$

Колебания новых пучков будут начинаться со все возрастающим периодом  $T = \frac{1}{\sqrt{\lambda'}}$ . При  $\bar{\rho} = \rho_{рав}$  фокусировка прекращается, и при дальнейшем вводе электронов они будут сбрасываться на стенки камеры.

Не нужно думать, что процесс ввода происходит гладко. В конкретных условиях захвата отдельные пучки на том или ином обороте целиком или частично могут столкнуться с пушкой или со стенками даже в самом благоприятном случае.

Однако это обстоятельство не будет являться катастрофическим для захвата, так как для нового пучка электростатическая обстановка будет уже другой, чем для „погибшего“ пучка, поэтому процесс захвата будет продолжаться и все потери будут компенсироваться <sup>1)</sup>).

### Условия движения стационарных электронных пучков с разными скоростями в постоянном магнитном поле бетатрона

В предыдущих пунктах мы имели дело с электронными пучками одной скорости, для которых потенциальная яма характеризовалась одним значением постоянной  $C$ , например  $C=0$ . Для электронных пучков с разными скоростями нужно принимать во внимание наличие особой потенциальной ямы для электронов данной скорости, т. е. ямы с определенным значением постоянной  $C$ .

Если выразить значение потенциальной функции  $V_m(C, r)$  через значение потенциальной функции  $V_m(0, R_0)$ , то получим в первом приближении

$$V_m(C, r) = V_{m0} \left[ 1 + \frac{2C}{R_0^2 H_{z0}} + \frac{C^2}{R_0^4 H_{z0}^2} + \frac{1-n_0}{R_0^2} \Delta r^2 - \frac{2C \Delta r}{R_0^3 H_{z0}} \right]. \quad (53)$$

Подсчитывая  $\rho_{рав}$  по формуле

$$4\pi e \rho_{рав} = \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial r} \approx \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2}$$

(зависимость  $V_m$  от  $z$  игнорируем и считаем  $r \gg \Delta r$ ), получим

$$4\pi e \rho_{рав} = \frac{2V_{m0}}{R_0^2} (1-n_0). \quad (54)$$

Таким образом, в этом приближении равновесная плотность не зависит от  $C$ . Линия минимумов потенциальных ям определится из условия:

$$\frac{\partial V_m}{\partial r} = \frac{e}{2mc^2} \left[ 2H_{z0}^2 (1-n_0) \Delta r - \frac{2H_{z0}}{R_0} C \right] = 0.$$

Сдвиг минимумов по отношению к минимуму ямы нулевых электронов

$$\Delta r = \frac{C}{R_0 H_{z0} (1-n_0)}. \quad (55)$$

<sup>1)</sup> Как мы увидим дальше, процесс захвата электронов с одинаковым для всех электронов значением постоянной  $C$  имеет только теоретический интерес, так как практически осуществлен быть не может.



Считаем далее, что электронная пушка бетатрона работает в режиме насыщения, т. е. при любом напряжении на электродах пушки с нити удаляются все вылетевшие электроны.

При данном накале нити плотность тока инъеции

$$i = e\rho v = e \cdot 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V} \rho = \text{const.}$$

Отсюда

$$\rho = \frac{i}{e \cdot 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V}} = \frac{b}{\sqrt{V}}. \quad (56)$$

Пусть  $V_0$  будет напряжение инъеции в вольтах, соответствующее нулевым электронам, и начальная плотность пучка этих электронов  $\rho_0 = \rho_{\text{рав}} \cdot k$ , где  $k$ —некоторое число. Тогда

$$b = \rho_{\text{рав}} \cdot k \sqrt{V_0}. \quad (57)$$

Если напряжение инъеции подается в виде импульса синусоидальной формы, соответственно будет меняться плотность пучка электронов

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{V_{\text{ам}} \sin \omega t}}, \quad (58)$$

где  $V_{\text{ам}}$ —амплитуда импульса инъеции,  $\omega$ —частота его. Напряжение нулевых электронов будет

$$V_0 = V_{\text{ам}} \sin \omega t_0. \quad (59)$$

Кажется очевидным, что захват электронов начинается только с тех электронов, для которых скорости соответствуют тем значениям  $C$ , для

которых имеются потенциальные ямы. Таким образом, нас будет интересовать в дальнейшем не вся кривая импульса инъеции, а только некоторые участки ее.

Инъецию будем рассматривать в предположении, что магнитное поле остается постоянным, т. е. картины более точные (рис. 4, кривые **A**) заменяем упрощенными (кривые **B** того же рисунка).

Все изложенное позволяет внести необходимые изменения в картину движения пучков электронов с разными скоростями по сравнению с картиной движения пучков с одной скоростью.

Изменение выражается прежде всего в том, что минимум потенциальной ямы для электронов с меньшей плотностью пучка (последующего пучка) сдвигается в сторону больших радиусов по сравнению с положением минимума предыдущего пучка на расстояние

$$\Delta r = \Delta x_0 = \frac{\Delta C}{R_0 H_{z0} (1 - n_0)}. \quad (60)$$

Кроме того, сдвиг потенциальной ямы для пучка предыдущего 1 (рис. 5), вызываемый пучком последующим 2, будет теперь отличаться на некоторую величину  $\Delta d$

$$\Delta d = d_2 - d_1,$$



где  $d_2$ —сдвиг фактически вызываемый пучком 2,  $d_1$ —сдвиг, который бы был вызван пучком 2, если бы его плотность оставалась равной плотности первого пучка

$$\Delta d = \frac{\Delta \rho}{\rho_{рав}} \cdot \Delta l_o. \quad (61)$$

Считаем, что в некотором интервале значений  $C$  равновесная плотность  $\rho_{рав}$  будет неизменной. И величину  $\Delta x_o$  и величину  $\Delta d$  можно конкретно выразить, если задать положение интервала напряжения, в котором будет возможен захват.

Пусть для  $C=0$  напряжение будет

$$V_o = V_{ам} \sin \omega t.$$

Для некоторого  $C$  соответствующая величина будет

$$V_c = V_{ам} \sin \omega t_c.$$

Если считать, что  $V_c$  близко к  $V_o$ , то

$$V_c = V_o [1 + \alpha (t_c - t_o)], \quad (62)$$

где

$$\alpha = \omega \frac{\cos \omega t_o}{\sin \omega t_o}.$$

В этом случае

$$C = \Delta C \approx \frac{cm}{e} R_i \cdot 5,93 \cdot 10^7 (\sqrt{V_c} - \sqrt{V_o}) = \frac{cm}{e} R_i \cdot 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V_o} \cdot \frac{\alpha}{2} (t_c - t_o). \quad (63)$$

Если считать  $t_c - t_o = T$ —времени оборота одного пучка (в наших расчетах это будет время оборота пучка нулевых электронов), можно подсчитать сдвиг равновесной орбиты нового пучка по отношению к предыдущему

$$\Delta x_o = D \frac{\sqrt{V_o} \cdot \alpha}{1 - n_o}. \quad (64)$$

Здесь

$$D = \frac{R_i}{2} \cdot 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{m}{2eV_{мо}}} \cdot T,$$

$\Delta \rho$  находится из общего выражения для  $C$ :

$$\rho_c = \rho_o + \Delta \rho = \frac{b}{\sqrt{V_o}} \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} (t_c - t_o) \right]. \quad (65)$$

Отсюда

$$d_c = d_o + \Delta d = d_o \left( 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_o} \right) = d_o \left( 1 - \frac{\alpha}{2} T \right). \quad (66)$$

### Вычисление траекторий пучков на втором обороте

Для разных скоростей пучков уравнения (50) переходят в уравнения вида

$${}_1x_2 = {}_1A_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} t + {}_1\beta_2) - d_c, \quad (67)$$

$${}_2x_2 = {}_2A_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot t + {}_2\beta_2) + d_o + \Delta x_o.$$

Здесь  $d_c$  и  $\Delta x_o$  имеют значения, указанные в предыдущем пункте.

Результаты вычисления траекторий пучков для  $n = 0,7; 0,75; 0,8$  даны на рис. 5,  $d_0$  взята равной 0,5 для всех трех кривых.

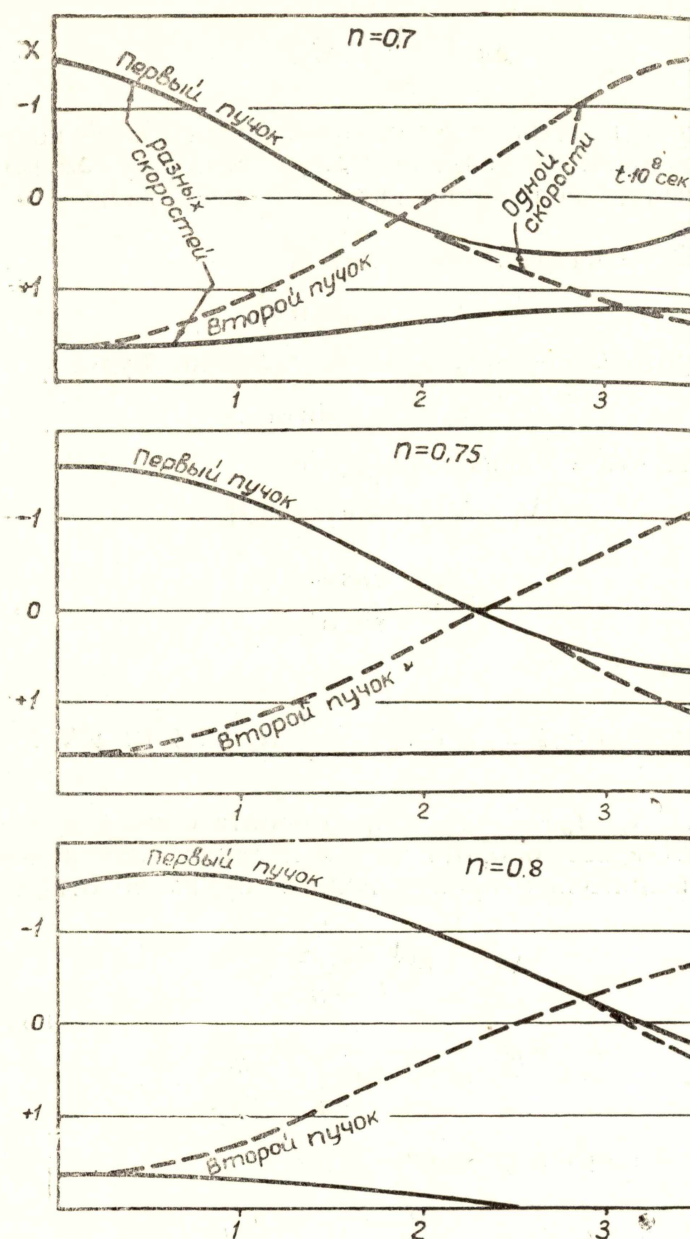


Рис. 5

Из рисунков видно, что амплитуды на втором обороте делаются меньше, чем для пучков с одинаковой плотностью. Чем круче идет возрастание напряжения в импульсе, тем резче убывает амплитуда колебаний. Для второго пучка амплитуда зависит от величины  $\Delta x_0$ , которая может оказаться большой величиной.

Если расписать формулу для амплитуды  ${}^1_1A_2$  получим

$${}^1_1A_2 = \left[ x_0^2 + d_0^2 + 2d_0x_0\cos\sqrt{\lambda}T - d_0^2\alpha T + \frac{d_0^2\alpha^2T^2}{4} - d_0\alpha T \cdot x_0\cos\sqrt{\lambda}T \right].$$

Таким образом, видно, что амплитуда первого пучка уменьшается по сравнению с амплитудой при одинаковой плотности пучков, если  $\alpha > 0$ . При

$\alpha < 0$  амплитуда  ${}^1_1A_2$  возрастает. При  $\alpha < 0$  возрастает также амплитуда  ${}^1_2A_2$ ; так как  ${}^1_2A_2 = (x_0 - d_0 - \Delta x_0)$ .

### Заключение

Рассматривать дальнейшие обороты не имеет смысла, так как оснований для того, чтобы считать справедливыми сделанные нами упрощающие предположения, делается все меньше и меньше. Поэтому попробуем сделать вывод из рассмотрения взаимодействия пучков электронов на первых оборотах, считая, что последующие обороты усугубляют эффекты на первых оборотах (выводы будут носить, конечно, гипотетический характер, и справедливость их может быть доказана только согласием с опытом теоретических следствий из этих выводов).

1. Благодаря взаимодействию между собой пучки электронов получают тенденцию к „выпрямлению“, т. е. к движению по окружности, concentричной с равновесной орбитой.

2. „Выпрямленные“ пучки могут образовать равновесный пучок. Равновесный пучок должен определять собой общее количество электронов, идущих в ускорение, т. е., в конечном счете, интенсивность излучения бетатрона.

3. Магнитные поля самих пучков, которые мы не рассматривали, могут только помогать процессу „выпрямления“, но играют второстепенную роль.

Заключительный этап захвата, каким он представляется в свете наших выводов, будет рассмотрен в следующей статье [7].

### ЛИТЕРАТУРА

1. D. W. Kerst and R. Serber, Phys. Rev., **60**, 53-58, 1944.
2. Терлецкий Я. П., Journ. Phys. USSR, **9**, 159, 1945.
3. J. A. Rajchman and W. H. Cherry, Journ. Frankl. Inst. **243**, 261—285, 1947.
4. R. Wideröe, Schwoizer Archiv, **13**, 205—232, 1947.
5. H. Jahn und H. Kopferman, Ann. d. Phys., **6**, 305—326, 1946.
6. J. Picht. Optica, **6**, 49—55, 61—97, 133—144, 1950.
7. Родимов Б. Н. О механизме захвата электронов в ускорение в бетатроне, II. Известия ТПИ, т. 87, 1957.
8. Родимов Б. Н. Закономерности магнитного поля бетатрона. Известия ТПИ, т. 87, 1957.